1. Определители 2-го, 3-го и *n*-го порядков, их свойства и методы вычисления.

Определителем второго порядка называется число равное разности произведений элементов *главной* и *побочной* диагоналей.

Определителем третьего порядка называется число, задаваемое равенством

$$|a_{11} \ a_{12} \ a_{13} ¿||a_{21} \ a_{22} \ a_{23} ¿|¿ ¿¿$$
$$¿$$

Понятие определителя может быть введено для квадратной матрицы любого порядка *n*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Для вычисления определителей *n*-го порядка ($n \geq 3$) на практике применяется многократное разложение этих определителей по строке (столбцу), что позволяет уменьшать каждый раз порядок вычисляемых определителей на единицу.

Вычисление определителя 3-го порядка сводится к вычислению алгебраической суммы трех определителей 2-го порядка

Свойства определителей

Свойство 1. Если все строки определителя заменить на столбцы с теми же номерами, то определитель не изменится

Свойство 2. При перестановке местами двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный (абсолютная величина определителя при этом не меняется)

Свойство 3. Если в определителе есть две одинаковые строки (столбца), то такой определитель равен нулю

Свойство 4. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя содержат общий множитель, то этот множитель можно вынести за знак определителя

Свойство 5. Если все элементы некоторого строки (столбца) определителя равны нулю, то этот определитель равен нулю

Свойство 6. Если все элементы одной строки (столбца) пропорциональны элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю

Свойство 7. Если каждый элемент некоторой строки определителя равен сумме двух элементов, то определитель равен сумме двух определителей, у первого из которых элементы этой строки – первые слагаемые, а у второго определителя – вторые слагаемые

Свойство 8. Если каждому элементу некоторой строки определителя прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на любое число, то определитель не изменится

2. Системы линейных алгебраических уравнений, методы их решения: метод Крамера

Решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Пусть дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \qquad (1.3)$$

где x_1, x_2 – переменные, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} – коэффициенты (первый индекс соответствует номеру уравнения, второй – номеру переменной), b_1, b_2 – свободные члены.

Решением системы (1.3) является пара чисел (x_1, x_2), подстановка которых в оба уравнения системы обращает эти уравнения в верные равенства.

Теорема Крамера (в случае n = 2). *Если определитель системы (1.3) не равен нулю, $\Delta \neq 0$, то система (1.3) имеет единственное решение* (x_1, x_2)*, где*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \tag{1.4}$$

Решение систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Пусть дана система трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.5}$$

Определителем системы (1.5) является определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

а дополнительными определителями являются определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{23} & b_3 \end{vmatrix}$$

Теорема Крамера <u>(в случае n = 3).</u> *Если определитель системы (1.5) не равен нулю, Δ ≠ 0, то система (1.5) имеет единственное решение* (x_1, x_2, x_3)*, где*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{1.6}$$

Решение систем *n* линейных уравнений с *n* неизвестными.

Теорема Крамера остается верной для системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными. Пусть дана система *n* уравнений с *n* неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \qquad (1.7)$$

Определителем системы (1.7) является определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

а дополнительные определители $\Delta_i(i=1,2,\ldots,n)$ получается из определителя Δ заменой столбца коэффициентов при неизвестном x_i на столбец свободных членов.

Теорема Крамера <u>(в случае произвольного значения *n*).</u> *Если определитель системы (1.7) не равен нулю, Δ ≠ 0, то система (1.7) имеет единственное решение* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, где*

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \ldots\ldots, \ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$$

3. Векторы и линейные операции над нами. Проекция вектора на ось. Теоремы о проекциях. Разложение вектора по базису, декартова система координат. Координаты вектора и точки. Простейшие задачи, в которых вычисляются: длина вектора; его направляющие косинусы; расстояние между точками; координаты точки, делящей отрезок в данном отношении.

Вектором называется направленный отрезок

Линейные операции над векторами

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число (скаляр) λ* называется новый вектор, имеющий длину $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ и направленный одинаково с $\vec{a}$ при $\lambda > 0$ или направленный противоположно с $\vec{a}$ при $\lambda < 0$.

Для сложения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *применяют правило параллелограмма* или *правило треугольника* Для сложения трех некомпланарных векторов применяют правило *параллелепипеда*.

В общем случае для сложения любого числа векторов применяют правило *многоугольника*

Разностью векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$ называется третий вектор $\vec{c}$ ($\vec{c}$ = $\vec{b} - \vec{a}$), который нужно сложить с вектором $\vec{a}$, чтобы получить вектор $\vec{b}$

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ *на ось* l называется число, равное произведению длины этого вектора на косинус угла между вектором и осью, т.е.

$$\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\phi$$

Если угол ϕ – острый, то $\text{пр}_l \overrightarrow{AB} > 0$, если ϕ – тупой , то $\text{пр}_l \overrightarrow{AB} < 0$

Свойства проекций

1. $\text{пр}_l \lambda\vec{a} = \lambda\,\text{пр}_l \vec{a}, \quad (\lambda = \text{const})$.
2. $\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b}$.

4. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, выражение через координаты перемножаемых векторов.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

называется число, обозначаемое $\vec{a}\cdot\vec{b}$ и равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\phi$$

(ϕ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$).

Свойства скалярного произведения:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

3. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;

4. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff \vec{a}\perp\vec{b}$

Выражение скалярного произведения через координаты сомножителей

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2,$$

т.е. *скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных координат.*

5. Векторное произведение векторов, его основные свойства, выражение через координаты перемножаемых векторов.

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, который удовлетворяет следующим трём условиям:

1. $|\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\phi;$

2. $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$;

3. тройка $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – правая (т.е. при наблюдении из конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки

Свойства векторного произведения

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$;

2. $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$;

3. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;

4. $\vec{a}\times\vec{b}=0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}\,||\,\vec{b}$.

Выражение векторного произведения через координаты сомножителей

$$\begin{array}{llll} & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{a}\times\vec{b}=| & X_1 & Y_1 & Z_1|\ ¿ \\ & X_2 & Y_2 & Z_2\ ¿ \end{array}$$

Свойства смешанного произведения.

1. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$;

2. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}=\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}=-\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}=-\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}=-\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}$;

3. $\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}=0 \Leftrightarrow a,\ \vec{b},\ \vec{c}$ – компланарны;

6. **Смешанное произведение векторов, его основные свойства, выражение через координаты перемножаемых векторов**

   Смешанным произведением трех векторов

   $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число

   $$\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$$

Выражение смешанного произведения через координаты сомножителей

$$\begin{array}{llll} & X_1 & Y_1 & Z_1 \\ \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=| & X_2 & Y_2 & Z_2|\ ¿ \\ & X_3 & Y_3 & Z_3\ ¿ \end{array}$$

7. **Приложения скалярного, векторного и смешанного произведений векторов в геометрии и механике.**

3. Приложения скалярного произведения к задачам геометрии и механики

1. Угол между векторами

$$\cos\phi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

2. Проекция вектора на направление другого вектора

Так как $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\phi = |\vec{a}|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$, то

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|},\qquad \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

3. Работа силы (механический смысл скалярного произведения).

Работа A силы $\vec{F}$ при прямолинейном перемещении тела на вектор $\vec{S}$ под действием силы $\vec{F}$ равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения:

$$A=\vec{F}\cdot\vec{S}.$$

Приложения векторного произведения к задачам геометрии и механики

1. Площадь параллелограмма (геометрический смысл векторного произведения).

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находится по формуле $S=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\phi=|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Площадь треугольника $S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

2. Момент силы (механический смысл векторного произведения). Пусть точка A твердого тела закреплена, а в точке B приложена сила $\vec{F}$. Тогда возникает вращающий момент $\vec{M}$, равный векторному произведению плеча силы $\overrightarrow{AB}$ на вектор силы $\vec{F}$, т.е.

$$\overrightarrow{M}=\overrightarrow{AB}\times\vec{F}$$

Приложения смешанного произведения к задачам геометрии

1. ***Объём параллелепипеда***, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, равен

$$V = |\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}|.$$

Объём пирамиды $$V = \frac{1}{6}|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}|.$$

2. ***Условие компланарности векторов в координатной форме:***

$a, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} = 0$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Декартовы и полярные координаты на плоскости. Уравнения линий в декартовых, полярных координатах и в параметрическом виде. Примеры.

Упорядоченная система двух или трёх пересекающихся перпендикулярных друг другу осей с общим началом отсчёта (началом координат) и общей единицей длины называется ***прямоугольной декартовой системой координат***.

Две перпендикулярные оси на плоскости с общим началом и одинаковой масштабной единицей образуют декартову прямоугольную систему координат на плоскости. Одна из этих осей называется осью Ох, или осью абсцисс, другую - осью Оу, или осью ординат.

Полярная система координат

- Суть задания какой-либо систем координат на плоскости состоит в том, чтобы каждой точке плоскости поставить в соответствующую пару действительных чисел, орпеделённое положение этой точки на плоскости.
- В случае полярной системы координат роль этих чисел играют расстояния точки от полюса и угол между полярной

осью и радиус-вектора этой точки. Этот угол ϕ называется полярным углом, а точка О называется полюсом, а луч ***l***-полярной осью.

- Можно установить связь между полярной и декартовой системой координат, если поместить начало декартовой системы в полюс, а полярную ось направить вдоль положительного направления оси Ох.
- Тогда координаты произвольной точки в двух различных системах координат связывают соотношением

$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

9. Прямая на плоскости и ее основные уравнения: общее, векторно-параметрическое, каноническое, по двум точкам, с угловым коэффициентом, «в отрезках». Условия параллельности и перпендикулярности прямых, вычисление угла между двумя прямыми, расстояния от точки до прямой.

Уравнение $Ax + By + C = 0$ называется общим уравнением прямой на плоскости.

Векторно-параметрическое уравнение прямой

$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{a}t,$

Каноническое уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$

Уравнение прямой по двум точкам

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0},$$

Уравнение прямой вида $y = k \cdot x + b$, где x и y - переменные, a k и b – некоторые действительные числа, называется уравнением прямой с угловым коэффициентом (k – угловой коэффициент).

Уравнение прямой в отрезках на плоскости в прямоугольной системе координатOxy имеет вид $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, где a и b - некоторые отличные от нуля действительные числа.

Условие параллельности прямых заключается в равенстве их угловых коэффициентов.

$\operatorname{tg}\varphi_1=\operatorname{tg}\varphi_2$ или $k_1=k_2$

Условие перпендикулярности прямых заключается в том, что произведение их угловых коэффициентов равно –1

$k_1k_2=-1$

Угол φ между двумя прямыми, заданными *общими уравнениями* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

угол между двумя прямыми на плоскости

Угол ϕ *между двумя прямыми*, заданными уравнениями: l_1: $y=k_1x+b_1$ и l_2: $y=k_2x+b_2$ можно найти по формуле

$$\operatorname{tg}\phi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$$

расстояние от точки до прямой на плоскости

Расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой $Ax+By+C=0$ вычисляется по формуле

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Формула для вычисления расстояния от точки до прямой в пространстве

Если s = {m; n; p} - направляющий вектор прямой l, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ - точка лежащей на прямой, тогда расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямой l можно найти, используя формулу

$$d = \frac{|M_0M_1 \times s|}{|s|}$$

10. Плоскость и ее основные уравнения: по точке и нормальному вектору, общее, по трём точкам, «в отрезках». Взаимное расположение двух плоскостей: условия их параллельности, перпендикулярности, совпадения, вычисление угла между ними. Вычисление расстояния от точки до плоскости.

общее уравнение плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad \left(A^2+B^2+C^2>0\right)$$

Частные случаи расположения плоскости, определяемой общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$

по точке и нормальному вектору

A(x − x0) + B(y − y0) + C(z − z0) = 0

уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Получим *уравнение плоскости в отрезках*:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

где a, b, c – это величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат.

Угол ϕ *между двумя плоскостями* равен углу между их векторами нормали :

$$\cos\phi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

взаимное расположение плоскостей

$P_1 \perp P_2 \;\Leftrightarrow\; A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$ (условие перпендиулярности плоскостей),

$P_1 || P_2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ (условие параллельности плоскостей).

расстояние от точки до п лоскости

Расстояние d *от точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *до плоскости* $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

11. Прямая в пространстве и ее основные уравнения: векторно-параметрическое, канонические, по двум точкам, общие уравнения (пара пересекающихся плоскостей).

параметрическим уравнениям прямой в пространстве:

$$\left| x = x_0 + mt, ¿ \left| y = y_0 + nt, ¿¿¿ \right.\right.$$

t – параметр

канонические уравнения прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

Уравнения прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

общими уравнениями прямой в пространстве

$$\{A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, ¿¿¿¿$$

12. Взаимное расположение двух прямых в пространстве: условия параллельности, пересечения, скрещиваемости, перпендикулярности. Вычисление расстояния от точки до прямой, угла и расстояния между прямыми. Взаимное расположение прямой и плоскости: условия их параллельности, принадлежности, перпендикулярности; вычисление угла между ними, координат точки их пересечения.

Условия параллельности двух прямых:

а) Если прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом, то необходимое и достаточное условие их параллельности состоит в равенстве их угловых коэффициентов:

$k_1 = k_2$.

б) Для случая, когда прямые заданы уравнениями в общем виде, необходимое и достаточное условие их параллельности состоит в том, что коэффициенты при соответствующих текущих координатах в их уравнениях пропорциональны, т. е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Условия перпендикулярности двух прямых:

а) В случае, когда прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом, необходимое и достаточное условие их перпендикулярности заключается в том, что их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку, т. е.

$$k = -\frac{1}{k_1}$$

Это условие может быть записано также в виде

$k_1 k_2 = -1$

б) Если уравнения прямых заданы в общем виде , то условие их перпендикулярности (необходимое и достаточное) заключается в выполнении равенства

$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$

Прямые пересекаются, если смешанное произведение $S_1 S_2 M_1 M_2 = 0$

Прямые скрещиваются, если смешанное произведение $S_1 S_2 M_1 M_2 \neq 0$

Если задано уравнение прямой Ax + By + C = 0, то расстояние от точки $M(M_x, M_y)$ до прямой можно найти, используя следующую формулу

$$d = \frac{|A \cdot M_x + B \cdot M_y + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

угол между прямыми:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|} = \frac{p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 + p_3 \cdot q_3}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \cdot \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

13. Кривые 2-го порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола и их уравнения в декартовых и полярных координатах, в параметрическом виде.

Кривой второго порядка называется линия, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

Окружностью называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра).

Если центр окружности поместить в начало координат, то *каноническое уравнение окружности* радиусом R имеет вид

$$x^2+y^2=R^2 .$$

Если центр окружности находится в точке $C(x_0, y_0)$, то ее уравнение записывается в виде

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 .$$

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, равная *2a*

каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 ,$$

где $b^2=a^2-c^2$, *a – большая, b – малая полуоси* эллипса (при *a>b*). Фокусы эллипса расположены в точках $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$.

. *Гиперболой* называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, равная *2a*.

Если выбрать прямоугольную систему координат с началом в точке *O*(0,0), то *каноническое уравнение гиперболы* запишется в виде

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 ,$$

где $b^2=c^2-a^2$, *a – действительная, b – мнимая полуоси* гиперболы.

Гипербола состоит из двух *ветвей* и расположена симметрично относительно координатных осей. При этом ее ветви при удалении в бесконечность как угодно близко подходят к прямым $y=\pm\frac{b}{a}x$, которые называются *асимптотами гиперболы*.

При построении гиперболы вначале строят *основной прямоугольник* со сторонами $x=\pm a, \quad y=\pm b$. Затем через противоположные вершины этого прямоугольника проводят прямые, которые являются асимптотами гиперболы.

Вершины гиперболы расположены в точках с координатами ($-a$,0) и (a,0), а фокусы – в точках $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$

Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ (или $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$) также задает гиперболу, *сопряженную* с гиперболой $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки F (фокуса) и данной прямой D (директрисы).

Если выбрать прямоугольную систему координат с началом в точке O(0,0), то *каноническое уравнение параболы* запишется в виде

$$y^2=2px.$$

Эта парабола симметрична относительно оси Ox. Директрисой является прямая $x=-\frac{p}{2}$, точка $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ – фокус параболы, p – *параметр параболы.*

14. Поверхности и их уравнения в пространстве. Каноническая теория поверхностей 2-го порядка: геометрические свойства и исследование их формы методом сечений. Уравнения поверхностей вращения.

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

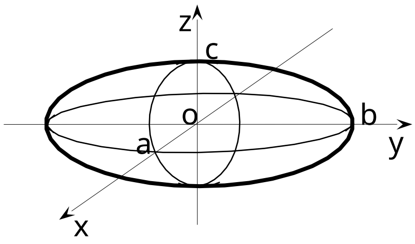
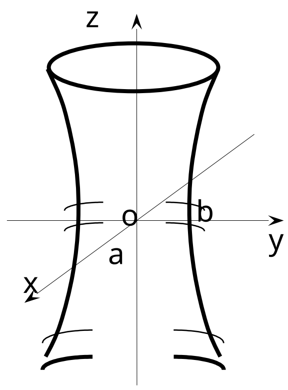


Рис. 2.15

Однополостный

гиперболоид

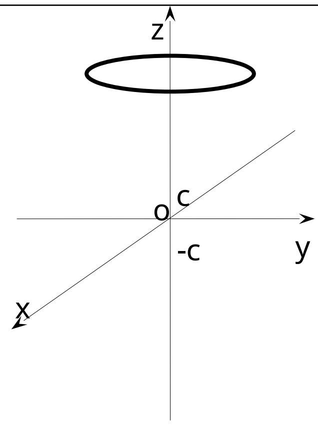


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Рис. 2.16

Двуполостный

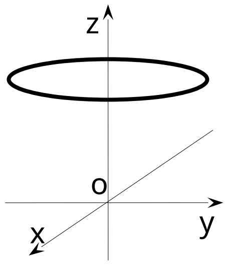
гиперболоид



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Рис. 2.17

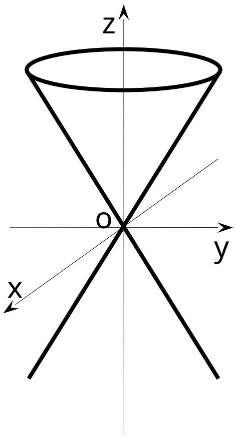
Эллиптически й параболоид



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

Рис. 2.18

Конус второго порядка

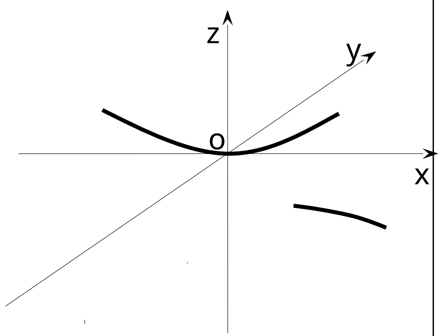


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Рис. 2.19

Гиперболическ ий параболоид

(седло)

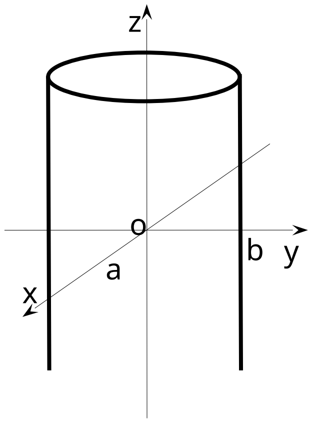


$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

Рис. 2.20

Эллиптически
й

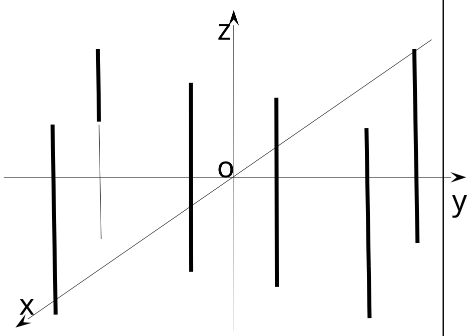
цилиндр



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Рис. 2.21

Гиперболичес
кий цилиндр

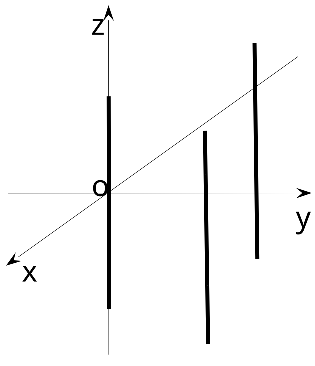


$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Рис. 2.22

Параболическ
ий

цилиндр



$$x^2=2\,py$$

Рис. 2.23

Рассмотрим в плоскости xOy эллипс, гиперболу, сопряженную гиперболу, параболу и пару пересекающихся прямых. Совершим вращение этих линий вокруг оси Oy и деформацию(сжатие или растяжение) образованных таким образом *поверхностей второго порядка.*

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, которая образуется при поступательном перемещении некоторой линии (*образующей*) вдоль некоторой кривой (*направляющей*). Выбирая в качестве направляющей эллипс, гиперболу и параболу, расположенные в плоскости xOy, а в качестве образующей – прямую, параллельную оси Oz, получим соответственно *эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры*,

При построении поверхностей второго порядка часто пользуются таблицей этих поверхностей , учитывая, что ось фигуры или образующая может быть параллельна не только оси Oz .

15. Множество действительных чисел. Числовые последовательности, их пределы.

Множество действительных чисел можно описать так: это множество конечных и бесконечных десятичных дробей; конечные десятичные дроби и бесконечные десятичные периодические дроби — рациональные числа, а бесконечные десятичные непериодические дроби — иррациональные числа.

16. Функции одной переменной, области определения и значений, способы задания функций. Основные элементарные функции и их графики. Класс элементарных функций. Предел функции в точке и в бесконечности. Односторонние пределы. Свойства пределов. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства. Первый и второй замечательные пределы. Число е и натуральные логарифмы. Сравнение бесконечно малых, эквивалентные бесконечно малые функции, их использование при нахождении пределов.

Если каждому элементу x из множества X по некоторому закону f ставится в соответствие вполне определенное действительное число y, то говорят, что y есть *функция* переменной величины x и пишут $y = f(x)$.

x -независимая переменная (*аргумент*); *y – зависимая переменная.*

Множество X называется *областью определения функции* $f(x)$ и обозначается $D(f)$. Множество всех значений y функции $y = f(x)$, когда x пробегает всю область определения, называется *областью изменения* или *областью значений функции* и обозначается $E(f)$.

Различают следующие *способы задания функции:* табличный, графический, аналитический (с помощью формул).

Под *графиком функции* понимают множество точек плоскости, абсциссы которых есть значения, а ординаты равны соответствующим значениям функции. График функции есть некоторая линия на плоскости.

Название	**Формула**
степенная функция	$y = x^a$ (при постоянном $a \in R$)
показательная функция	$y = a^x$ (при постоянном $a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$)
логарифмическая функция	$y = \log_a x$ (при постоянном $a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$)
тригонометрические функции	$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$
обратные тригонометрические функции	$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$

Число A называется *пределом последовательности* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.

Число *A* называется *пределом функции* $y=f(x)$ *при* $x\to a$ (*в точке* $x=a$), если для каждого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любого $x\in D(f)$ и удовлетворяющего неравенству $0<|x-a|<\delta$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Число A называется *пределом функции* $y=f(x)$ *при* $x\to\pm\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $M>0$, что при всех $|x|>M$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Односторонний предел — предел числовой функции, подразумевающий «приближение» к предельной точке с одной стороны. Такие пределы называют соответственно левым и правым пределами.

Число b называется правым пределом функции $f(x)$ в точке a, если для $\forall\epsilon>0\,\exists\delta>0$ такое, что для любого $x\in D[f]$ и $a<x<a+\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\epsilon$ (рис. 1). Правый предел обозначается
$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x)=f(a+0)=b$$

Число b называется левым пределом функции $f(x)$ в точке a, если для $\forall\epsilon>0\,\exists\delta>0$ такое, что для любого $x\in D[f]$ и $a-\delta<x<a$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\epsilon$ (рис. 2). Левый предел обозначается $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a-} f(x)=f(a-0)=b$

Свойства пределов функции:

1. Предел суммы/разности двух функций равен сумме/разности их пределов:

   $$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

2. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

   $$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

3. Предел частного двух функций равен частному их пределов, при условии, что предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\ \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

4. Константу можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a}\left[c\cdot f(x)\right] = c\cdot\lim_{x\to a} f(x)$$

5. Предел степени с натуральным показателем равен степени предела:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n,\ n\in N$$

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой при* $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

Функция $\beta(x)$ называется *бесконечно большой при* $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=\infty$.

Теорема.

Если функция $\alpha(x)$ *— бесконечно малая при* $x\to a$, *то* $\frac{1}{\alpha(x)}$ *— бесконечно большая функция при* $x\to a$ $\left(\frac{1}{0}=\infty\right)$.

Если функция $\beta(x)$ *— бесконечно большая при* $x\to a$, *то* $\frac{1}{\beta(x)}$ *- бесконечно малая функция при* $x\to a$ $\left(\frac{1}{\infty}=0\right)$.

Справедливы следующие утверждения:

1. Сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.
2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть

бесконечно малая функция.

3. Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

Теоремы о пределах

Если пределы $\lim\limits_{x\to a} u(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} v(x)$ существуют и конечны, то

1. $\lim\limits_{x\to a} cu(x)=c\lim\limits_{x\to a} u(x)$, где $c-const$;

2. $\lim\limits_{x\to a}\left(u(x)+v(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} u(x)+\lim\limits_{x\to a} v(x)$;

3. $\lim\limits_{x\to a}\left(u(x)\cdot v(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} u(x)\cdot\text{¿¿}\lim\limits_{x\to a} v(x)$;

4. $\lim\limits_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} u(x)}{\lim\limits_{x\to a} v(x)}$, где $\lim\limits_{x\to a} v(x)\neq 0$.

Замечательные пределы.

- Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

- Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e,$$

e — иррациональное число, $e\approx 2,718281828$ — одна из фундаментальных величин в математике. Функция $y=e^{x}=\exp(x)$ называется *экспонентой*; $y=\log_e x=\ln x$ называется *натуральным логарифмом.*

Для сравнения двух бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в точке $x=a$ находят предел отношения $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$.

Если $A \neq 0$ и $A \neq \infty$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка.*

Если $A = 0$, то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой высшего порядка по сравнению с* $\beta(x)$. Записывается это так: $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

Если $A = 1$, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *эквивалентным* и обозначают $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Основные эквивалентности при $x \to 0$:

$\sin kx \sim kx$, $tgkx \sim kx$,

$\arcsin kx \sim kx$, $arctgkx \sim kx$,

$\ln(1+kx) \sim kx$, $e^{kx} - 1 \sim kx$.

Предел отношения двух бесконечно малых функций в некоторой точке равен пределу отношения эквивалентных им бесконечно малых функций в той же точке.

17. Непрерывность функции в точке, интервале, на отрезке. Непрерывность основных элементарных и элементарных функций в области их определения. Точки разрыва функции и их классификация. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = x_0$, если предел функции в точке x_0 существует и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = x_0$, если существуют односторонние пределы в точке x_0 и

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Если хотя бы один из этих односторонних пределов не существует или равен бесконечности, то x_0 называется *точкой разрыва второго рода*.

Если функция непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$, то она называется *непрерывной на этом отрезке*

Теорема I. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны в точке* x_0 *, то в этой точке непрерывны функции* $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$.

Теорема II. *Сложная функция, составленная из непрерывных функций, непрерывна в соответствующей точке.*

Теорема III. *Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.*

Теорема 1 (о сохранении знака непрерывной функции). *Если* $f(x)$ *непрерывная в точке* x_0 *и* $f(x_0)$ $\neq 0$, *то существует интервал, которому принадлежит точка* x_0,*, где функция* $f(x)$ *имеет тот же знак,. что и* $f(x_0)$.

Теорема 2 (о наибольшем, наименьшем и промежуточных значениях непрерывной функции). *Непрерывная на отрезке* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *достигает на этом отрезке наибольшего M и наименьшего m значения, а также принимает все свои промежуточные значения, т.е. для произвольного* $m<\mu<M$ *существует хотя бы одно значение* $c \in [a, b]$ *такое, что* $f(c)=\mu$

Теорема 3 (о нулях непрерывной функции). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и на концах отрезка принимает* *значения противоположных знаков, т.е.* $f(a)f(b)<0$*,то существует хотя бы одно значение* $x_0 \in [a, b]$ *такое, что* $f(x_0)=0$ (*существует корень уравнения* $f(x)=0$

18. Производная функции, её смысл (геометрический, физический, экономический). Производная суммы, разности, произведения, частного функций, сложной и обратной функций. Таблица производных основных элементарных функций. Уравнения касательной и нормали к графику функции.

Производной функции $y=f(x)$ *в точке x* называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда $\Delta x \to 0$, т.е.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Для производной функции $y=f(x)$ в точке *x* применяют также обозначения:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}.$$

Функция, имеющая в данной точке конечную производную, называется *дифференцируемой* в этой точке.

Геометрический смысл производной

производная $f'(x_0)$ *функции* $y=f(x)$ *равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке с абсциссой* x_0.

Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0),$$

а *уравнение нормали* к данной кривой в этой же точке записывается в виде

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

при условии, что $f'(x_0)\neq 0$.

Если $f'(x_0)=0$, то уравнение касательной: $y=f(x_0)$, а уравнение нормали: $x=x_0$.

Механический смысл производной. Пусть материальная точка движется прямолинейно по закону $s=s(t)$. Тогда $v=s'(t)$, *т.е. производная от пути по времени есть скорость движения точки.*

Производная суммы равна сумме производных.

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$$

Производная разности равна разности производных

$$(u(x) - v(x))' = u'(x) - v'(x)$$

Производная произведения находится по формуле **(uv)'=u'v+v'u**
Производная чатсного

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u(x)' \cdot v(x) - v(x)' \cdot u(x)}{v^2(x)}$$